Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

Дисциплина: Моделирование

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 7

на тему

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ

НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ,

ВАРИАНТ № 5

Студенты: А.В. Гуринович

Проверила: Ю.О. Герман

МИНСК 2022

# 1. Цель работы

Изучить методы анализа и оптимизации решений на основе моделей массового обслуживания.

# 2. Теоретические сведения

Система массового обслуживания (далее – СМО) – это любая система, предназначенная для обслуживания поступающих в нее заявок.

Заявки, поступающие на обслуживание в СМО, образуют поток заявок. Элементы СМО, обслуживающие заявки, называются каналами обслуживания.

В большинстве случаев интервалы времени между моментами поступления заявок и/или временами обслуживания заявок в СМО представляют собой случайные величины. Теория систем массового обслуживания основана на математическом аппарате теории вероятностей и математической статистики.

## 2.1 Поток заявок

Для расчета характеристик СМО требуется формальное описание потока заявок, поступающих в нее.

### 2.1.1 Стационарность

Поток событий является стационарным, если количество событий на любом интервале времени зависит только от длительности этого интервала, но не зависит от его расположения на оси времени.

### 2.1.2 Ординарность

Поток событий является ординарным, если вероятность появления нескольких событий за элементарный интервал времени очень мала по сравнению с вероятностью появления за этот же период одного события.

### 2.1.3 Ограниченность последствия

Поток событий является потоком с ограниченным последействием, если интервалы времени между событиями представляют собой независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же закону.

### 2.1.4 Отсутствие последствия

Поток обладает свойством отсутствия последействия, если количество событий на любом интервале времени не зависит от количества событий на любом другом интервале времени.

### 2.1.5 Поток Пальма

Потоком Пальма называется поток событий, обладающий свойствами стационарности, ординарности, ограниченности последействия.

### 2.1.6 Пуассоновский поток

Наиболее точный расчет характеристик возможен для СМО, в которых поток заявок является пуассоновским (простейшим). Пуассоновским называется поток заявок, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

## 2.2 Поступление заявок

Интервалы времени между моментами поступления заявок и времена обслуживания заявок в СМО обычно представляют собой случайные величины. Законы распределения:

* экспоненциальный закон – интервал времени между заявками или время их обслуживания может быть как очень коротким, так и очень длительным;
* равномерный закон – интервал времени между заявками или время их обслуживания всегда принимает значение в пределах некоторого диапазона;
* гауссовский (нормальный) закон – интервал времени между заявками или время их обслуживания в значительном большинстве случаев принимает значения, близкие к некоторой средней величине;
* закон Эрланга k-го порядка – интервал времени между заявками или время их обслуживания представляет собой сумму k случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону.

В некоторых случаях интервал времени между заявками или время их обслуживания может быть точно известным заранее, т.е. представляет собой не случайную, а детерминированную величину.

## 2.3 Описание СМО

Для описания СМО может использоваться обозначение:

В данном обозначении буквы имеют следующие значения:

* A – закон распределения интервалов времени между заявками;
* B – закон распределения времени обслуживания;
* m – количество каналов;
* d – дисциплина обслуживания.

Для законов распределения существуют следующие обозначения:

* M – экспоненциальное распределение;
* G – любое другое.

Для некоторых распределений используются специальные обозначения:

* D – детерминированная величина;
* Ek – распределение Эрланга k-го порядка.

# 3. Ход работы

## 3.1 Одноканальная система

Станок используется для обработки некоторых деталей. Интервалы между деталями, поступающими на обработку, **описываются экспоненциальной случайной величиной со средним значением 10 минут**. Время обработки детали на станке описывается **гауссовской случайной величиной со средним значением 7 минут, стандартным отклонением 0,5 минут**. Затраты, связанные с работой станка, составляют , когда станок работает (т.е. обрабатывает детали), и – когда станок простаивает. Прочие затраты на обработку одной детали составляет Детали продаются по цене .

Вычислить характеристики станка, а также прибыль от его работы за 8 часов.

Предполагая, что интервалы между деталями и времена обработки – экспоненциальные случайные величины, найти следующие вероятности:

* вероятность наличия в системе ровно двух деталей;
* вероятность того, что количество деталей, ожидающих обработки, составит более трех;
* вероятность того, что количество деталей, ожидающих обработки, составит не более четырех;
* вероятность того, что в системе не будет ни одной детали, ожидающей обработки.

Поток заявок и время обслуживания представляют из себя экспоненциальные случайные величины, имеется только один поток, следовательно систему можно описать в виде:

### 3.1.1 Интенсивность потока заявок

Так как средний интервал между заявками по экспоненциальному закону составляет 10 минут, то интенсивность потока будет равна отношению единицы времени и среднего интервала между заявками:

### 3.1.2 Параметры канала обслуживания

Количество каналов обслуживания составляет:

Так как обслуживание заявки описывается гауссовской случайной величиной со средним значением 7 минут, то среднее время обслуживания заявки в канале и интенсивность обслуживания соответственно равны:

### 3.1.3 Нагрузка

Рассчитаем нагрузку на СМО по формуле:

### 3.1.4 Вероятности

Вероятность простоя найдём, отняв от единицы нагрузку на СМО:

Вероятность отказа для СМО без ограничений отсутствует:

Вероятность обслуживания в СМО без отказов равна нулю:

### 3.1.5 Среднее

Чтобы найти среднюю длину очереди, необходимо использовать коэффициент вариации для распределений интервалов поступления заявок и времён обслуживания. Так как закон первой – экспоненциальный, то:

Для распределения времён обслуживания заявок используется гауссовское распределение, найдём его коэффициент вариации по формуле:

Теперь найдём среднюю длину очереди:

Коэффициент загрузки равен произведению нагрузки на СМО на разность единицы и вероятности отказа:

Среднее число заявок на обслуживании равно произведению количества каналов обслуживания на коэффициент нагрузки:

Среднее число заявок в СМО является суммой среднего числа заявок в очереди и среднему числу заявок на обслуживании:

Пропускная способность СМО равна произведению интенсивности обслуживания на среднее число заявок на обслуживании:

Среднее время прибывания заявки в очереди является частным деления средней длины очереди и пропускной способности СМО:

Среднее время пребывания заявки в СМО:

### 3.1.6 Прибыль

Станок работал 8 часов, что в минутах:

Чтобы найти прибыль сначала вычислим несколько величин. Выручка от обслуживания заявок за время работы является произведением пропускной способности СМО на выручку от выполнения одной заявки на всё время работы, выручка с одной заявки составляет D = 12:

Теперь найдём расходы, на каждую заявку приходится расход в размере C = 2, тогда:

Теперь найдём расходы на эксплуатацию системы, то есть отдельно расходы во время обработки заявок и простоя, где расходы на обработку и простой соответственно составляют A = 18 и B = 4 денежных единиц в час, для вычислений переведём их в денежные единицы в минуту:

Теперь можно вычислить прибыль, отняв от выручки расходы:

### 3.1.7 Вероятности нахождения в СМО

Сначала вычислим вероятности нахождения n-го количества заявок в системе, для этого воспользуемся формулой:

Вероятность того, что в системе находится равно две детали составляет:

Вероятность того, что более трёх заявок ожидают обработки можно вычислить, отняв от полной группы несовместных событий вероятности нахождения в системе нуля, одной, двух, трёх и четырёх заявок, так как только при пяти заявках в системе одна будет обрабатываться, а четыре находиться в очереди:

Вероятность того, что в очереди системы находится не более четырёх рассчитывается путём суммирования всех вероятностей состояний системы в до того, как в очереди окажется пять заявок:

Вероятность отсутствия деталей в очереди является суммой вероятностей отсутствия заявок в обработке и одной завивки в обработке:

## 3.2 Многоканальные системы без ограничений на очередь

Два станка используются для обработки некоторых деталей. Интервалы между деталями, поступающими на обработку, составляют . Время обработки детали на станке – минут. Затраты, связанные с работой станка, составляют час, когда станок работает (т.е. обрабатывает детали), и – когда станок простаивает. Прочие затраты на обработку одной детали составляет Детали продаются по цене

Необходимо:

а) Вычислить характеристики системы.

б) Вычислить следующие вероятности состояний:

* вероятность наличия в системе ровно двух деталей;
* вероятность наличия в системе ровно пяти деталей;
* вероятность того, что поступившая деталь будет сразу же (без ожидания в очереди) принята на обработку;
* вероятность наличия в системе не более трех деталей;
* вероятность наличия в системе более чем трех деталей, ожидающих обработки.

в) Найти:

* достаточно ли одного станка для обработки деталей;
* может ли система с двумя станками обслуживать детали, если в нее будет поступать дополнительный поток деталей со средним интервалом между деталями 7 минут.

г) Вычислить прибыль за 8 часов работы.

Поток заявок и время обслуживания не представляют из себя экспоненциальные случайные величины, имеется два потока, следовательно систему можно описать в виде:

### 3.2.1 Интенсивность потока заявок

Так как интервал между заявками по составляет 10 минут, то интенсивность потока будет равна отношению единицы времени и среднего интервала между заявками:

### 3.2.2 Параметры канала обслуживания

Количество каналов обслуживания составляет:

Среднее время обслуживания заявки в канале и интенсивность обслуживания соответственно равны:

### 3.2.3 Нагрузка

Рассчитаем нагрузку на СМО по формуле:

### 3.2.4 Вероятности

Вероятность простоя для СМО с несколькими каналами обслуживания найдём по формуле:

Вероятность отказа для СМО без ограничений отсутствует:

Вероятность обслуживания в СМО без отказов равна нулю:

### 3.2.5 Среднее

Теперь найдём среднюю длину очереди по формуле:

Коэффициент загрузки равен произведению нагрузки на СМО на разность единицы и вероятности отказа:

Среднее число заявок на обслуживании равно произведению количества каналов обслуживания на коэффициент нагрузки:

Среднее число заявок в СМО является суммой среднего числа заявок в очереди и среднему числу заявок на обслуживании:

Пропускная способность СМО равна произведению интенсивности обслуживания на среднее число заявок на обслуживании:

Среднее время прибывания заявки в очереди является частным деления средней длины очереди и пропускной способности СМО:

Среднее время пребывания заявки в СМО:

### 3.2.6 Вероятности нахождения в СМО

Сначала вычислим вероятности нахождения n-го количества заявок в системе, для этого воспользуемся формулой:

Вероятность нахождения ровно двух деталей в системе равна:

Вероятность нахождения в системе ровно пяти деталей равна:

Вероятность того, что деталь сразу поступит на обработку равна сумме вероятностей с нулевой по вторую включительно, так как начиная от трёх заявок в системе одна будет в очереди:

Вероятность того, что не более трёх заявок находятся в системе, можно вычислить, сложив все вероятности от нуля заявок до трёх:

Вероятность того, что в очереди системы находится более трёх заявок рассчитывается путём нахождения разности совокупности несовместных событий и суммы всех вероятностей состояний системы в до того, как в очереди окажется четыре заявки:

### 3.2.7 Один станок

Для того, чтобы оценить, будет ли достаточно одного станка для данной СМО, пересчитаем нагрузку на СМО, но изменим количество каналов обслуживания на m = 1:

Так как нагрузка меньше единицы, можем полагать, что одного станка для данной СМО было бы достаточно.

### 3.2.8 Дополнительный поток деталей

Проверим, сможет ли система обслуживать дополнительный поток деталей, для этого рассчитаем новый интервал поступления заявок:

Теперь рассчитаем новую интенсивность поступления заявок:

Рассчитываем нагрузку на СМО:

Хоть величина и увеличилась, она не достигала единицы, что доказывает, что система сможет обслуживать заявки из двух потоков.

### 3.2.9 Прибыль

Два станка используются для обработки некоторых деталей. Интервалы между деталями, поступающими на обработку, составляют . Время обработки детали на станке – минут. Затраты, связанные с работой станка, составляют час, когда станок работает (т.е. обрабатывает детали), и – когда станок простаивает. Прочие затраты на обработку одной детали составляет Детали продаются по цене

Станок работал 8 часов, что в минутах:

Чтобы найти прибыль сначала вычислим несколько величин. Выручка от обслуживания заявок за время работы является произведением пропускной способности СМО на выручку от выполнения одной заявки на всё время работы, выручка с одной заявки составляет D = 12:

Теперь найдём расходы, на каждую заявку приходится расход в размере C = 2, тогда:

Теперь найдём расходы на эксплуатацию системы, то есть отдельно расходы во время обработки заявок и простоя, где расходы на обработку и простой соответственно составляют A = 18 и B = 4 денежных единиц в час, для вычислений переведём их в денежные единицы в минуту:

Теперь можно вычислить прибыль, отняв от выручки расходы:

## 4. Вывод

Изучены методы анализа и оптимизации решений на основе моделей массового обслуживания.