Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

Дисциплина: Моделирование

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 7

на тему

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ

НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ,

ВАРИАНТ № 5

Студенты: А.В. Гуринович

Проверила: Ю.О. Герман

МИНСК 2022

**СОДЕРЖАНИЕ**

[1. Цель работы 2](#_Toc119369120)

[2. Теоретические сведения 2](#_Toc119369121)

[2.1 Поток заявок 2](#_Toc119369122)

[2.1.1 Стационарность 2](#_Toc119369123)

[2.1.2 Ординарность 2](#_Toc119369124)

[2.1.3 Ограниченность последствия 2](#_Toc119369125)

[2.1.4 Отсутствие последствия 3](#_Toc119369126)

[2.1.5 Поток Пальма 3](#_Toc119369127)

[2.1.6 Пуассоновский поток 3](#_Toc119369128)

[2.2 Поступление заявок 3](#_Toc119369129)

[2.3 Описание СМО 3](#_Toc119369130)

[3. Ход работы 4](#_Toc119369131)

[3.1 Одноканальная система 4](#_Toc119369132)

[3.1.1 Интенсивность потока заявок 5](#_Toc119369133)

[3.1.2 Параметры канала обслуживания 5](#_Toc119369134)

[3.1.3 Нагрузка 5](#_Toc119369135)

[3.1.4 Иные характеристики 5](#_Toc119369136)

[3.1.5 Прибыль 7](#_Toc119369137)

[3.1.6 Вероятности нахождения в СМО 8](#_Toc119369138)

[3.2 Многоканальные системы без ограничений на очередь 9](#_Toc119369139)

[3.2.1 Интенсивность потока заявок 9](#_Toc119369140)

[3.2.2 Параметры канала обслуживания 10](#_Toc119369141)

[3.2.3 Нагрузка 10](#_Toc119369142)

[3.2.4 Иные характеристики 10](#_Toc119369143)

[3.2.5 Вероятности нахождения в СМО 11](#_Toc119369144)

[3.2.6 Один станок 13](#_Toc119369145)

[3.2.7 Дополнительный поток заявок 13](#_Toc119369146)

[3.2.8 Прибыль 14](#_Toc119369147)

[3.3 Системы с приоритетами 15](#_Toc119369148)

[3.3.1 Интенсивности потоков заявок 15](#_Toc119369149)

[3.3.2 Параметры канала обслуживания 16](#_Toc119369150)

[3.3.3 Нагрузка 16](#_Toc119369151)

[3.3.4 Общее характеристики 17](#_Toc119369152)

[3.3.5 Обслуживание без приоритетов 17](#_Toc119369153)

[3.3.6 Обслуживание с относительными приоритетами 20](#_Toc119369154)

[3.3.7 Обслуживание с абсолютными приоритетами 21](#_Toc119369155)

[3.3.7 Сравнение дисциплин обслуживания 22](#_Toc119369156)

[4. Вывод 22](#_Toc119369157)

# 1. Цель работы

Изучить методы анализа и оптимизации решений на основе моделей массового обслуживания.

# 2. Теоретические сведения

Система массового обслуживания (далее – СМО) – это любая система, предназначенная для обслуживания поступающих в нее заявок.

Заявки, поступающие на обслуживание в СМО, образуют поток заявок. Элементы СМО, обслуживающие заявки, называются каналами обслуживания.

В большинстве случаев интервалы времени между моментами поступления заявок и/или временами обслуживания заявок в СМО представляют собой случайные величины. Теория систем массового обслуживания основана на математическом аппарате теории вероятностей и математической статистики.

## 2.1 Поток заявок

Для расчета характеристик СМО требуется формальное описание потока заявок, поступающих в нее.

### 2.1.1 Стационарность

Поток событий является стационарным, если количество событий на любом интервале времени зависит только от длительности этого интервала, но не зависит от его расположения на оси времени.

### 2.1.2 Ординарность

Поток событий является ординарным, если вероятность появления нескольких событий за элементарный интервал времени очень мала по сравнению с вероятностью появления за этот же период одного события.

### 2.1.3 Ограниченность последствия

Поток событий является потоком с ограниченным последействием, если интервалы времени между событиями представляют собой независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же закону.

### 2.1.4 Отсутствие последствия

Поток обладает свойством отсутствия последействия, если количество событий на любом интервале времени не зависит от количества событий на любом другом интервале времени.

### 2.1.5 Поток Пальма

Потоком Пальма называется поток событий, обладающий свойствами стационарности, ординарности, ограниченности последействия.

### 2.1.6 Пуассоновский поток

Наиболее точный расчет характеристик возможен для СМО, в которых поток заявок является пуассоновским (простейшим). Пуассоновским называется поток заявок, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

## 2.2 Поступление заявок

Интервалы времени между моментами поступления заявок и времена обслуживания заявок в СМО обычно представляют собой случайные величины. Законы распределения:

* экспоненциальный закон – интервал времени между заявками или время их обслуживания может быть как очень коротким, так и очень длительным;
* равномерный закон – интервал времени между заявками или время их обслуживания всегда принимает значение в пределах некоторого диапазона;
* гауссовский (нормальный) закон – интервал времени между заявками или время их обслуживания в значительном большинстве случаев принимает значения, близкие к некоторой средней величине;
* закон Эрланга k-го порядка – интервал времени между заявками или время их обслуживания представляет собой сумму k случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону.

В некоторых случаях интервал времени между заявками или время их обслуживания может быть точно известным заранее, т.е. представляет собой не случайную, а детерминированную величину.

## 2.3 Описание СМО

Для описания СМО может использоваться обозначение:

В данном обозначении буквы имеют следующие значения:

* A – закон распределения интервалов времени между заявками;
* B – закон распределения времени обслуживания;
* m – количество каналов;
* d – дисциплина обслуживания.

Для законов распределения существуют следующие обозначения:

* M – экспоненциальное распределение;
* G – любое другое.

Для некоторых распределений используются специальные обозначения:

* D – детерминированная величина;
* Ek – распределение Эрланга k-го порядка.

# 3. Ход работы

## 3.1 Одноканальная система

Станок используется для обработки некоторых заявок. Интервалы между заявками, поступающими на обработку, **описываются экспоненциальной случайной величиной со средним значением 10 минут**. Время обработки заявки на станке описывается **гауссовской случайной величиной со средним значением 7 минут, стандартным отклонением 0,5 минут**. Затраты, связанные с работой станка, составляют , когда станок работает (т.е. обрабатывает заявки), и – когда станок простаивает. Прочие затраты на обработку одной заявки составляет Заявки продаются по цене .

Вычислить характеристики станка, а также прибыль от его работы за 8 часов.

Предполагая, что интервалы между заявками и времена обработки – экспоненциальные случайные величины, найти следующие вероятности:

* вероятность наличия в системе ровно двух заявок;
* вероятность того, что количество заявок, ожидающих обработки, составит более трех;
* вероятность того, что количество заявок, ожидающих обработки, составит не более четырех;
* вероятность того, что в системе не будет ни одной заявки, ожидающей обработки.

Поток заявок и время обслуживания представляют из себя экспоненциальные случайные величины, имеется только один поток, следовательно систему можно описать в виде:

### 3.1.1 Интенсивность потока заявок

Так как средний интервал между заявками по экспоненциальному закону составляет 10 минут, то интенсивность потока будет равна отношению единицы времени и среднего интервала между заявками:

### 3.1.2 Параметры канала обслуживания

Количество каналов обслуживания составляет:

Так как обслуживание заявки описывается гауссовской случайной величиной со средним значением 7 минут, то среднее время обслуживания заявки в канале и интенсивность обслуживания соответственно равны:

### 3.1.3 Нагрузка

Рассчитаем нагрузку на СМО по формуле:

### 3.1.4 Иные характеристики

Вероятность простоя найдём, отняв от единицы нагрузку на СМО:

Вероятность отказа для СМО без ограничений на очередь отсутствует:

Вероятность обслуживания в СМО без отказов равна нулю:

Чтобы найти среднюю длину очереди, необходимо использовать коэффициент вариации для распределений интервалов поступления заявок и времён обслуживания. Так как закон первой – экспоненциальный, то:

Для распределения времён обслуживания заявок используется гауссовское распределение, найдём его коэффициент вариации по формуле:

Теперь найдём среднюю длину очереди:

Коэффициент загрузки равен произведению нагрузки на СМО на разность единицы и вероятности отказа:

Среднее число заявок на обслуживании равно произведению количества каналов обслуживания на коэффициент нагрузки:

Среднее число заявок в СМО является суммой среднего числа заявок в очереди и среднему числу заявок на обслуживании:

Пропускная способность СМО равна произведению интенсивности обслуживания на среднее число заявок на обслуживании:

Среднее время прибывания заявки в очереди является частным деления средней длины очереди и пропускной способности СМО:

Среднее время пребывания заявки в СМО:

### 3.1.5 Прибыль

Станок работал 8 часов, что в минутах:

Чтобы найти прибыль сначала вычислим несколько величин. Выручка от обслуживания заявок за время работы является произведением пропускной способности СМО на выручку от выполнения одной заявки на всё время работы, выручка с одной заявки составляет D = 12:

Теперь найдём расходы, на каждую заявку приходится расход в размере C = 2, тогда:

Теперь найдём расходы на эксплуатацию системы, то есть отдельно расходы во время обработки заявок и простоя, где расходы на обработку и простой соответственно составляют A = 18 и B = 4 денежных единиц в час, для вычислений переведём их в денежные единицы в минуту:

Теперь можно вычислить прибыль, отняв от выручки расходы:

### 3.1.6 Вероятности нахождения в СМО

Сначала вычислим вероятности нахождения n-го количества заявок в системе, для этого воспользуемся формулой:

Вероятность того, что в системе находится равно две заявки составляет:

Вероятность того, что более трёх заявок ожидают обработки можно вычислить, отняв от полной группы несовместных событий вероятности нахождения в системе нуля, одной, двух, трёх и четырёх заявок, так как только при пяти заявках в системе одна будет обрабатываться, а четыре находиться в очереди:

Вероятность того, что в очереди системы находится не более четырёх рассчитывается путём суммирования всех вероятностей состояний системы в до того, как в очереди окажется пять заявок:

Вероятность отсутствия заявок в очереди является суммой вероятностей отсутствия заявок в обработке и одной завивки в обработке:

## 3.2 Многоканальные системы без ограничений на очередь

Два станка используются для обработки некоторых заявок. Интервалы между заявками, поступающими на обработку, составляют . Время обработки заявки на станке – минут. Затраты, связанные с работой станка, составляют час, когда станок работает (т.е. обрабатывает заявки), и – когда станок простаивает. Прочие затраты на обработку одной заявки составляет Заявки продаются по цене

Необходимо:

а) Вычислить характеристики системы.

б) Вычислить следующие вероятности состояний:

* вероятность наличия в системе ровно двух заявок;
* вероятность наличия в системе ровно пяти заявок;
* вероятность того, что поступившая заявка будет сразу же (без ожидания в очереди) принята на обработку;
* вероятность наличия в системе не более трех заявок;
* вероятность наличия в системе более чем трех заявок, ожидающих обработки.

в) Найти:

* достаточно ли одного станка для обработки заявок;
* может ли система с двумя станками обслуживать заявки, если в нее будет поступать дополнительный поток заявок со средним интервалом между заявками 7 минут.

г) Вычислить прибыль за 8 часов работы.

Поток заявок и время обслуживания не представляют из себя экспоненциальные случайные величины, имеется два потока, следовательно систему можно описать в виде:

### 3.2.1 Интенсивность потока заявок

Так как интервал между заявками по составляет 10 минут, то интенсивность потока будет равна отношению единицы времени и среднего интервала между заявками:

### 3.2.2 Параметры канала обслуживания

Количество каналов обслуживания составляет:

Среднее время обслуживания заявки в канале и интенсивность обслуживания соответственно равны:

### 3.2.3 Нагрузка

Рассчитаем нагрузку на СМО по формуле:

### 3.2.4 Иные характеристики

Вероятность простоя для СМО с несколькими каналами обслуживания найдём по формуле:

Вероятность отказа для СМО без ограничений на очередь отсутствует:

Вероятность обслуживания в СМО без отказов равна нулю:

Теперь найдём среднюю длину очереди по формуле:

Коэффициент загрузки равен произведению нагрузки на СМО на разность единицы и вероятности отказа:

Среднее число заявок на обслуживании равно произведению количества каналов обслуживания на коэффициент нагрузки:

Среднее число заявок в СМО является суммой среднего числа заявок в очереди и среднему числу заявок на обслуживании:

Пропускная способность СМО равна произведению интенсивности обслуживания на среднее число заявок на обслуживании:

Среднее время прибывания заявки в очереди является частным деления средней длины очереди и пропускной способности СМО:

Среднее время пребывания заявки в СМО:

### 3.2.5 Вероятности нахождения в СМО

Сначала вычислим вероятности нахождения n-го количества заявок в системе, для этого воспользуемся формулой:

Вероятность нахождения ровно двух заявок в системе равна:

Вероятность нахождения в системе ровно пяти заявок равна:

Вероятность того, что заявка сразу поступит на обработку равна сумме вероятностей с нулевой по вторую включительно, так как начиная от трёх заявок в системе одна будет в очереди:

Вероятность того, что не более трёх заявок находятся в системе, можно вычислить, сложив все вероятности от нуля заявок до трёх:

Вероятность того, что в очереди системы находится более трёх заявок рассчитывается путём нахождения разности совокупности несовместных событий и суммы всех вероятностей состояний системы в до того, как в очереди окажется четыре заявки:

### 3.2.6 Один станок

Для того, чтобы оценить, будет ли достаточно одного станка для данной СМО, пересчитаем нагрузку на СМО, но изменим количество каналов обслуживания на m = 1:

Так как нагрузка меньше единицы, можем полагать, что одного станка для данной СМО было бы достаточно.

### 3.2.7 Дополнительный поток заявок

Проверим, сможет ли система обслуживать дополнительный поток заявок, для этого рассчитаем новый интервал поступления заявок:

Теперь рассчитаем новую интенсивность поступления заявок:

Рассчитываем нагрузку на СМО:

Хоть величина и увеличилась, она не достигала единицы, что доказывает, что система сможет обслуживать заявки из двух потоков.

### 3.2.8 Прибыль

Два станка используются для обработки некоторых заявок. Интервалы между заявками, поступающими на обработку, составляют . Время обработки заявки на станке – минут. Затраты, связанные с работой станка, составляют час, когда станок работает (т.е. обрабатывает заявки), и – когда станок простаивает. Прочие затраты на обработку одной заявки составляет Заявки продаются по цене

Станок работал 8 часов, что в минутах:

Чтобы найти прибыль сначала вычислим несколько величин. Выручка от обслуживания заявок за время работы является произведением пропускной способности СМО на выручку от выполнения одной заявки на всё время работы, выручка с одной заявки составляет D = 12:

Теперь найдём расходы, на каждую заявку приходится расход в размере C = 2, тогда:

Теперь найдём расходы на эксплуатацию системы, то есть отдельно расходы во время обработки заявок и простоя, где расходы на обработку и простой соответственно составляют A = 18 и B = 4 денежных единиц в час, для вычислений переведём их в денежные единицы в минуту:

Теперь можно вычислить прибыль, отняв от выручки расходы:

## 3.3 Системы с приоритетами

В некоторой система массового обслуживания обрабатываются заявки двух типов (*A* и *B*). Интервалы между моментами поступления заявок – экспоненциальные случайные величины со средним значением Время обработки заявок – .

Вычислить характеристики системы для трех дисциплин обслуживания:

а) без приоритетов;

б) с относительными приоритетами;

в) с абсолютными приоритетами.

Для дисциплин обслуживания с приоритетами более высокий приоритет имеют заявки с меньшим ожидаемым временем обслуживания (т.е. с меньшим значением X).

Расчет для обслуживания без приоритетов выполнить согласно пункту 10.11 (СМО с заявками с разным временем обслуживания).

Проанализировать полученные характеристики и выбрать дисциплину обслуживания, обеспечивающую кратчайшее среднее время пребывания заявки в СМО.

Некоторые из характеристик необходимы для всех дисциплин обслуживания, рассчитаем их:

Потоки заявок представляют из себя экспоненциальные случайные величины, времена обслуживания – нет, существует только один поток, следовательно систему можно описать в виде:

### 3.3.1 Интенсивности потоков заявок

Так как интервал между заявками типов A и B составляет 15 и 12 минут соответственно, то интенсивность потока будет равна отношению единицы времени и среднего интервала между заявками:

Теперь вычислим общую интенсивность потока, которая будет равна сумме интенсивностей всех потоков:

Найдём доли заявок каждого типа в общем потоке:

### 3.3.2 Параметры канала обслуживания

Количество каналов обслуживания составляет:

Среднее время обслуживания заявки в канале и интенсивность обслуживания соответственно равны:

Теперь рассчитаем среднее время обработки заявок всех видов и общее:

### 3.3.3 Нагрузка

Рассчитаем нагрузку на СМО по формуле:

Коэффициент загрузки равен произведению нагрузки на СМО на разность единицы и вероятности отказа:

### 3.3.4 Общее характеристики

Вероятность простоя найдём, отняв от единицы нагрузку на СМО:

Вероятность отказа для СМО без ограничений на очередь отсутствует:

Вероятность обслуживания в СМО без отказов равна нулю:

### 3.3.5 Обслуживание без приоритетов

Чтобы найти среднюю длину очереди, необходимо использовать коэффициенты вариации для распределений интервалов поступления заявок и времён обслуживания. Так как законы первых – экспоненциальные, то:

Для распределения времён обслуживания заявок типа А используется экспоненциальное распределение, а времена обработки заявок типа B имеют равномерный закон распределения, найдём дисперсии этих случайных величин. Из теории вероятностей известно, что для случайных величин с экспоненциальным распределением дисперсия определяется по формуле:

Случайная величина для заявок типа B, распределена по равномерному закону. Из теории вероятностей известно, что дисперсия такой величины определяется по нижеуказанной формуле, где a и b – соответственно нижняя и верхняя границы диапазона значений случайной величины:

Найдем коэффициент вариации времени обслуживания всех заявок, для этого вычислим вторые начальные моменты времен обработки заявок каждого по формуле:

Второй начальный момент времени обслуживания всех заявок является суммой этих двух моментов:

Дисперсия времени обслуживания всех заявок вычисляются по формуле:

Коэффициент вариации времени обслуживания всех заявок вычисляется по формуле:

Коэффициент вариации интервалов поступления всех заявок выражен экспоненциальным законом, что означает, что оба коэффициента, равно как и общий коэффициент вариации для интервалов поступления заявок всех типов, равным единице:

Теперь найдём среднюю длину очереди:

Среднее число заявок на обслуживании равно произведению количества каналов обслуживания на коэффициент нагрузки:

Среднее число заявок в СМО является суммой среднего числа заявок в очереди и среднему числу заявок на обслуживании:

Пропускная способность СМО равна произведению интенсивности обслуживания на среднее число заявок на обслуживании:

Среднее время прибывания заявки в очереди является частным деления средней длины очереди и пропускной способности СМО:

Среднее время пребывания заявки в СМО:

### 3.3.6 Обслуживание с относительными приоритетами

Найдём среднее время пребывания заявок обоих типов по формулам:

Теперь можно вычислить среднее время пребывания в очереди для всей системы:

Среднее время пребывание заявки в СМО:

Среднее число заявок в СМО:

Пропускная способность СМО:

Среднее число заявок на обслуживании равно нагрузке на систему:

Среднее число заявок в очереди:

### 3.3.7 Обслуживание с абсолютными приоритетами

Найдём среднее время пребывания заявок обоих типов по формулам:

Среднее время пребывания в очереди:

Среднее время пребывание заявки в СМО:

Среднее число заявок в СМО:

Среднее число заявок в очереди:

### 3.3.7 Сравнение дисциплин обслуживания

Сравнение дисциплин обслуживания в таблице 3.1. Из результатов следует, что среднее время нахождения заявки в системе для дисциплин с отсутствием, относительным и абсолютным приоритетами составляет соответственно 18,147, 7,607, 6,766. Очевидно, что наиболее эффективной системой является система с абсолютными приоритетами.

## 4. Вывод

Изучены методы анализа и оптимизации решений на основе моделей массового обслуживания.

Таблица 3.1 – Сводная таблица по всем дисциплинам

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Приоритет | Отсутствует | Относительный | | | Абсолютный | | |
| Тип сигнала | Все | Все | A | B | Все | A | B |
| (нагрузка) | 0,5(3) | 0,5(3) | 0,2 | 0,(3) | 0,5(3) | 0,2 | 0,(3) |
| (заявки в очереди) | 0,928 | 0,593 | 0,1(61) | 0,432 | 0,481 | 0,05 | 0,432 |
| (заявки на обслуживании) | 0,5(3) | 0,5(3) | 0,2 | 0,(3) | 0,5(3) | 0,2 | 0,(3) |
| (все заявки) | 1,361 | 1,12 | 0,36(1) | 0,765 | 1,014 | 0,765 | 0,765 |
| (пропускная способность) | 0,15 | 0,15 | 0,0(6) | 0,08(3) | 0,15 | 0,0(6) | 0,08(3) |
| (время в очереди) | 5,571 | 3,951 | 2,41(6) | 5,178 | 3,21 | 0,75 | 5,178 |
| (всё время) | 18,147 | 7,507 | 5,41(6) | 9,17 | 6,766 | 3,75 | 9,178 |
| (простой) | 0,4(6) | 0,4(6) | – | – | 0,4(6) | – | – |